Copie anonyme - n°anonymat : 358919

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 24 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées Emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I

1a) $rg(A-2I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice avec trois colonnes identiques donc $\boxed{rg(A-2I) = 1}$

b) Soit E_2 le sous espace propre associé à 2.

$$X \in E_2 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x + y + z = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = -y-z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Donc $\boxed{E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ceci prouve que $\boxed{2 \text{ est valeur propre}}$

De plus, $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de E_2 car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $\boxed{\dim E_2 = 2}$

c) $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et les vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_2.

d) $\dim E_2 = 2$ et la dimension maximale de la somme des sous-espaces propres est 3 car $\mathrm{rg} A = 3$

Donc : $\dim E_\lambda = 1$ car $3-2=1$

Ainsi, il n'y a qu'une autre valeur propre possible pour A.

2a) Les coordonnées du vecteur colonne MU représente la somme des coordonnées de chaque ligne de M.

Par exemple : La première coordonnée de MU correspond à la somme des coefficients de la première ligne de M.

b) Soit λ, la valeur propre associée à A et différente de 2.

$$rg(A-\lambda I) = rg\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 1-(3-\lambda) & 3-\lambda-1 \\ 0 & 3-\lambda-1 & (3-\lambda)^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow (3-\lambda)L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^2-1+2-\lambda \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

on cherche : $(3-\lambda)^2 - 1 + 2 - \lambda = 0 \iff 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 + 2 - \lambda = 0$

$\iff \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 10$ $\qquad \lambda_1 = \dfrac{7-3}{2}$ $\qquad \lambda_2 = \dfrac{7+3}{2}$

$\Delta = 9$ $\qquad \lambda_1 = 2$ $\qquad \lambda_2 = 5$

Donc $\boxed{\text{l'autre valeur propre de } A \text{ est } 5.}$

Soit E_5 le sous espace propre associé à 5.

$$X \in E_5 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

Donc $\boxed{E_5 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base car c'est une famille d'un unique vecteur non nul.

3) $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

on a ainsi : $A = PDP^{-1}$.

Partie II

$$(S) : \begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + y + 3z \end{cases}$$

4) on pose : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

on remarque alors que : $(S) \Leftrightarrow X' = AX$

on pose alors : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = P^{-1}X$

Et : $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$ $\qquad Y' = P^{-1}X'$

on a ainsi : $Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 5y_3 \end{cases}$

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{2t} \\ y_3(t) = C_3 e^{5t} \end{cases}, \text{ avec } (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

on pose alors : $X = PY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{5t} \end{pmatrix}$

$$X = PY \iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1e^{2t} - C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ C_1e^{2t} + C_3e^{5t} \\ C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \end{pmatrix}$$

Donc les solutions de (S) sont :

$$\boxed{(S) \quad : \begin{cases} x(t) = -C_1e^{2t} - C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ y(t) = C_1e^{2t} + C_3e^{5t} \\ z(t) = C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \end{cases}}$$

5a) D'après le théorème de cauchy, si un système différentiel de la forme $X' = AX$ admet une solution et qu'il existe un réel t_0 tel que $X(t_0) = t_0$ alors il existe une unique solution $X_0 : t \longmapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$.

b) $$X_0(0) = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 + C_3 \\ C_1 + C_3 \\ C_2 + C_3 \end{pmatrix}$$

on cherche $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -C_1 - C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 + C_3 = -1 \\ C_2 + C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -C_1 + 2C_3 = 1 \\ C_1 + C_3 = -1 \\ C_2 = -C_3 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} -C_1 + 2C_3 = 1 \\ 3C_3 = 0 \\ C_2 = -C_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

Donc la solution X_0 telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

est : $\boxed{X_0(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}}$

Partie III

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6) $\det(B - \lambda I) = (-1-\lambda)(3-\lambda) - (-4)\times 1$

$= -3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$= (\lambda - 1)^2$

Donc : $\lambda = 1$

Soit E_1 le sous espace propre associé à 1

$X \in E_1 \iff \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$\iff \{ x = -2y$

Donc : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

$\boxed{\text{La seule valeur propre de } B \text{ est } 1}$

7) $\dim E_1 = 1 \neq 2$ or $\text{rg} B = 2$

Donc $\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable}}$ car la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est différentes de 2.

8a) On étudie la liberté de v_1 et v_2.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ / $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$ (E)

(E) $\iff \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases}$

$(E) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Donc v_1 et v_2 forment une famille libre de cardinal 2.
Donc $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

b) $f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$ $\qquad$ $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$

Donc $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) T est la matrice de transition de la base canonique à la base $\beta = (v_1, v_2)$

Ainsi on a : $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } B = QTQ^{-1}}$

g) $(\Sigma) \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

$(\Sigma) \iff X' = BX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées Emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

$x \in]0;+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

1a) f est une fonction de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ car c'est le quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

$x \mapsto e^{x}$ est strictement positif, idem pour $x \mapsto x^2$.
Ainsi, $x \mapsto -x-1$ pour $x \in]0;+\infty[$ est strictement négatif donc f' est strictement négative.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

On suppose $P(n)$: "(u_n) est bien définie et $u_n > 0$"

Initialisation

$u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ et u_0 est bien définie

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

On suppose $P(n)$ vraie

D'après l'hypothèse de réccurrence on a :

$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad u_n \text{ bien définie}$$

On applique $f : x \mapsto f(x)$ strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$$\cancel{f(u_n) < \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \iff u_{n+1} < \lim_{x \to 0^+} f(x)}$$

Or $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ et $u_n > 0$ d'après HR donc $f(u_n) > 0 \iff u_{n+1} > 0$

D'autre part, f est continue et pour tout u_n définie, $f(u_n) = u_{n+1}$. avec u_{n+1} définie

Donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion : $\boxed{\text{D'après l'axiome de réccurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \text{ et } u_n \text{ est bien définie.}}$

2)a)
```
def fonc_1(a):
        from numpy export exp
        u=1
        n=0
        while u<=a:
              u = exp(-u)/u
              n = n+1
        return n
```

b) On en déduit ainsi que : $\boxed{10^{-6} < u_5 < 10^{6} < u_6}$

c)
```
def u(n):
    from numpy import exp
    u=1
    for i in range(0; n ):
        u = exp(-u)/u
    return u
```

3) $x \in [0;+\infty[$ et $g(x) = e^{-x} - x^2$

a) g est une fonction de classe $C^{\wedge}$ sur $[0;+\infty[$ par somme de fonctions de classe $C^{\wedge}$ sur $[0;+\infty[$.

$g'(x) = -e^{-x} - 2x$

$x \mapsto -e^{-x}$ est négative pour $x \in [0,+\infty[$
$x \mapsto -2x$ est négative ou nulle pour $x \in [0;+\infty[$
Donc g' est strictement négative.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	1 $\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

g est une fonction strictement décroissante et continue sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;1]$.

Donc $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$.

b) $f(x) = x \iff \dfrac{e^{-x}}{x} - x = 0$

$$\iff \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0$$

$$\iff \frac{g(x)}{x} = 0$$

~~On sait que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$.~~
~~D'autre part, $x \mapsto \frac{1}{x}$~~

On pose : $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x \in]0;+\infty[$

h est une fonction de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ par quotient de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle.

$$h'(x) = \frac{g'(x)x - g(x)}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{(-e^{-x} - 2x)x - e^{-x} + x^2}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{x\left(-e^{-x} - 2x - \frac{e^{-x}}{x} + x\right)}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{-x - e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x}}{x}$$

$$h'(x) = \frac{-x - e^{-x} - f(x)}{x}$$

$x \mapsto -x - e^{-x}$ est négatif pour $x \in]0;+\infty[$

$x \mapsto -f(x)$ est négatif pour $x \in]0;+\infty[$ car f est strictement positive sur cet intervalle.

Copie anonyme - n°anonymat : 358919

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 24 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EmLyon

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc : h' est strictement négative pour $x \in]0;+\infty[$
soit : $\frac{g(x)}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	
$f(x)-x$	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x) = -\infty$

Donc : $f(x)-x$ réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$, car $f(x)-x=0$ et $0 \in \mathbb{R}$.

c) D'une part : $f(\frac{1}{e}) - \frac{1}{e} = \dfrac{e^{-\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} - \frac{1}{e}$

$= e^{-e^{-1}} \times e - \frac{1}{e}$

$= e^{-e^{-1}+1} - e^{-1}$

or $e \approx 2{,}7$ donc $-e^{-1}+1 > -1$

soit : $e^{-e^{1}+1} > e^{-1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $f(\frac{1}{e}) - \frac{1}{e} > 0$.

D'autre part : $f(1) - 1 = \frac{e^{-1}}{1} - 1$

$= \frac{1}{e} - 1$

< 0, car $\frac{1}{2,7} < 1$

Ainsi : on sait que $f(\alpha) - \alpha = 0$

$f(\frac{1}{e}) - \frac{1}{e} > 0$

$f(1) - 1 < 0$

donc par décroissance de la fonction f on a :

$$\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$$

4a) $u_0 = 1$

on a : $u_1 = f(u_0)$

$u_1 = e^{-1}$

Ainsi : $u_2 = f(u_1)$

$u_2 = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}}$

$u_2 = e^{-e^{-1}} \times e$

$u_2 = e^{-e^{-1}+1}$

or : $-e^{-1} > -1 \Leftrightarrow -e^{-1} + 1 > 0$

or : $e^0 = 1$

donc : $u_2 > e^0$

$u_2 > 1$

$\boxed{u_2 > u_0}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

on suppose $P(n)$: "(u_{2n}) est croissante"

• Initialisation faites à la question 4a).

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

on suppose $P(n)$ vraie

D'après HR on a : $u_{2n+2} > u_{2n}$

Par décroissance de f on a : $f(u_{2n+2}) < f(u_{2n})$

Donc : $u_{2n+4} > u_{2n+2}$

Donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{2n}) \text{ est croissante}}$

c) On suppose que (u_{2n+1}) converge vers un réel l.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n+1}) = l \iff \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_{2n+1}) = l$, par unicité de la limite car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+3}$

Donc :

5) $x \in]0;+\infty[$ et $h(x) = f \circ f(x)$ et $h(0) = 0$

a) $h(x) = f \circ f(x)$

$h(x) = f(f(x))$

$h(x) = e^{-f(x)} \times \dfrac{1}{f(x)}$

$$\boxed{h(x) = e^{-\frac{e^{-x}}{x}} \times \frac{x}{e^{-x}}}$$

b) $x \mapsto e^{-f(x)}$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto \dfrac{x}{e^{-x}}$ est continue sur $[0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ainsi, h est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ par produit de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-f(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{e^{-x}} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$

Donc $\boxed{h \text{ est continue sur } [0;+\infty[}$

c)

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 24 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques Appliquées Emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 3

Partie I

$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $x \mapsto x\ln(x)$ est une fonction continue pour $x > 0$ par produit de fonctions continues pour $x > 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$, par croissances comparées.

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0 = h(0)$

Donc $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$

b) Soit $h \neq 0$, on étudie le taux d'accroissement en 0 :

$\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\ln h}{h}$

$= \ln h$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \ln h = -\infty$ donc $\boxed{\text{h n'est pas dérivable en 0}}$

c) $h(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x \ln x = 0$

$x \ln x = 0 \iff \ln x = 0$
$\iff x = 1$

Donc $\boxed{h(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ ou } x = 1}$.

2) $x \in [0;1]$ et $g(x) = -h(x) - h(1-x)$

g est une fonction de classe C^1 sur $]0;1[$ car c'est une somme de fonctions de classe C^1 sur $]0;1[$.

En effet, $x \mapsto h(x)$ est C^1 sur $]0;1]$
et, $x \mapsto h(1-x)$ est C^1 sur $[0;1[$.

Ainsi, $g'(x) = -h'(x) - h'(1-x)$
$= -\ln(x) + 1 - (\ln(1-x) + 1)$
$= -\ln(x) - \ln(1-x)$
$= -\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$
$= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

Or : $\frac{1}{x} - 1 > 1 \iff \frac{1}{x} > 2$

$\iff 1 > 2x$
$\iff \frac{1}{2} > x$

Donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$

$g(\frac{1}{2}) = -h(\frac{1}{2}) - h(\frac{1}{2})$

$= -2h(\frac{1}{2})$

$= -2(\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}))$

$= -\ln(1/2)$

$= \ln(2)$

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$

Partie II

3) $U(\Omega) = [\![1;n]\!]$

$P(U=k) = \frac{1}{n}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$

$H(U) = -\sum_{k=1}^{n} h(P(U=k))$

$H(U) = -\sum_{k=1}^{n} P(U=k)\ln(P(U=k))$

$H(U) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n})$

$H(U) = -\ln(\frac{1}{n})$

$\boxed{H(U) = \ln(n)}$

4) $X(\Omega) = \{0;1\}$

$P(X=0) = p$ et $P(X=1) = 1-p$

$H(X) = -\sum_{k=0}^{1} h(P(X=k))$

$H(X) = -(\ p\ln(p) + (1-p)\ln(1-p)\ )$

$H(X) = g(p)$, d'après question 2)

Donc d'après 2), $g(p) = \ln(2)$ pour $p = \frac{1}{2}$

Soit $\boxed{H(X) \leq \ln(2) \text{ seulement pour } p = \frac{1}{2}}$.

5) a) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_2)$

$X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ et $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$

Donc $\boxed{(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0; 1; 2\}}$

b) $P(Z = 1) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) \cup P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0])$

par indépendance des variables on a :

$P(Z = 1) = P(X_1 = 0) P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) P(X_2 = 0)$
$P(Z = 1) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1) p_2$

On a bien : $\boxed{P(Z = 1) = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)}$

c) $1 - 2p = 1 - 2(P(Z = 1))$
$1 - 2p = 1 - [2(p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1))]$
$1 - 2p = 1 - [2p_1(1 - p_2) + 2p_2(1 - p_1)]$
$1 - 2p = 1 - [2p_1 - 2p_1 p_2 + 2p_2 - 2p_1 p_2]$
$1 - 2p = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1 p_2$

D'autre part : $(1 - 2p_1)(1 - 2p_2) = 1 + 4p_1 p_2 - 2p_1 - 2p_2$

Donc on a bien : $\boxed{1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 358919

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 24	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EmLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

6)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

S_n est une loi binomiale tel que : $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On suppose $\mathcal{P}(n)$: " $1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n$ "

Initialisation

$P(Z_1 = 1) = \sum_{k=1}^{1} X_k$ impair soit $P(Z_1 = 1) = P(X_1 = 1)$

$P(Z_1 = 1) = p$

D'autre part : $1 - 2p = (1-2p)^1$

Donc $P(1)$ est vraie.

Héredité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie

Donc par HR on a : $1 - 2P(Z_n = 1) = (1-2p)^n$

Cas où S_n est pair :

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie III

7) a) Soit f_U la densité de U.

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H(U) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f_U(t)\,dt$$

$$H(U) = -\int_a^b f_U(t) \ln(f_U(t)\,dt$$

H(U) existe car l'intégrale admet des bornes finies donc $\boxed{\text{U admet une entropie}}$

b) $H(U) = \int_b^a f_U(t) \ln(f_U(t))\,dt$

$H(U) = \int_b^a \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) dt$

$$H(U) = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) \int_b^a 1\,dt$$

$$H(U) = \left[\frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right)\right](b-a)$$

$$\boxed{H(U) = \ln\left(\frac{1}{b-a}\right)}$$

8) Soit $f_X(x)$ la densité de la variable X

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ correspond à l'espérance de X car $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$

donc : $\boxed{\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}}$

b) $H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \circ f(t)\,dt$

$$H(X) = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \ln(\lambda e^{-\lambda t})\,dt$$

$$H(X) = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} - \lambda t \ln(\lambda e)\,dt$$

$$H(X) = -\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} - t(\ln(\lambda) + \ln(e))\,dt$$

$$H(X) = -\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} - t\ln(\lambda) - t\,dt$$

$$H(X) = -\lambda \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\ln(\lambda)}{2} t^2 - \frac{1}{2} t^2\right]_0^A$$

$$H(X) = -\lambda$$

9) $\boxed{E(X) = m}$ et $\boxed{V(X) = \sigma^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = E(X^2)$$

Or d'après Koening - Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \iff V(X) + E(X)^2 = E(X^2)$$
$$\iff \sigma^2 + m^2 = E(X^2)$$

Donc : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = \sigma^2 + m^2}$

b) $H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}\right)dt$

$H(X) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right.$