Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{f(n)}$.
7. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(n)}\right|\leq\frac{1}{(e-1)e^n}$.
8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g=U\longrightarrow\mathbb{R},(x,y)\longmapsto g(x,y)=\frac{1}{x}+e^x-y^2e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.
10. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x,y).
11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$, où α est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha,0)$?
13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha,-2)$?
14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E : $i:E\longrightarrow E,x\longmapsto x$ et $\theta:E\longrightarrow E,x\longmapsto 0_E$.
On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f\neq\theta,f^2+i\neq\theta,fo(f^2+i)=\theta$$

où f^2 désigne fof.

1. (a) Montrer que f n'est pas bijectif.
   (b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u\neq 0_E$ et $f(u)=0_E$.

   Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1\neq 0_E$ et $f(v_1)=0_E$.
2. Montrer : $sp(f)=\{0\}$.
3. Est-ce que f est diagonalisable ?
4. Montrer que f^2+i n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v\neq 0_E$ et $f^2(v)=-v$.

   Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2\neq 0_E$ et $f^2(v_2)=-v_2$. On note $v_3=f(v_2)$.
5. Montrer : $f(v_3)=-v_2$.
6. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

   On considère les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,
   et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A,B,C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}=\{aA+bB+cC;(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.
8. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; CM = MC\} = \mathcal{F}$
9. (a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

   (b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.
10. On note $g = f^2 - i$.
    Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.