Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(n)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.
8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g = U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.
10. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x, y).
11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?
13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?
14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E : $i : E \longrightarrow E, x \longmapsto x$ et $\theta : E \longrightarrow E, x \longmapsto 0_E$.
On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, f^2 + i \neq \theta, fo(f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne fof.

1. (a) Montrer que f n'est pas bijectif.
   (b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

   Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.
2. Montrer : $sp(f) = \{0\}$.
3. Est-ce que f est diagonalisable ?
4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

   Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.
5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.
6. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

   On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.
8. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathcal{F}$
9. (a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

   (b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.
10. On note $g = f^2 - i$.
    Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.