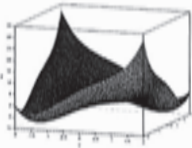


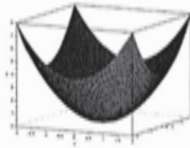
5) a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction  $f$ .

```
function z=f(x,y)
z = -----
endfunction
x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplot3d(x,y,f)
```

b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

### Exercice 2

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille  $(e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ , les fonctions  $e_0, e_1, e_2$  étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1, e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application  $\varphi$  qui, à toute fonction  $P$  de  $E$ , associe la fonction, notée  $\varphi(P)$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

- 1) a) Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
- b) Déterminer  $(\varphi(e_0))(x)$ ,  $(\varphi(e_1))(x)$  et  $(\varphi(e_2))(x)$  en fonction de  $x$ , puis écrire  $\varphi(e_0)$ ,  $\varphi(e_1)$  et  $\varphi(e_2)$  comme combinaisons linéaires de  $e_0, e_1, e_2$ .
- c) Dédire des questions précédentes que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

- 2) a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(e_0, e_1, e_2)$ . On vérifiera que la première ligne de  $A$  est :

$$\left( 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right)$$

- b) Justifier que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$ .
- c) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

- 3) Compléter les commandes Scilab suivantes pour que soit affichée la matrice  $A^n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[-----]
disp(-----)
```

- 4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un réel  $u_n$  tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner  $u_0$  et établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

- b) En déduire, par sommation, l'expression de  $u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 c) Écrire  $A^n$  sous forme de tableau matriciel.

### Exercice 3

Soit  $V$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction  $F_V$  définie par :  $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

On pose  $W = -\ln V$  et on admet que  $W$  est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée  $F_W$ . On dit que  $W$  suit la loi de Gumbel.

- 1) a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$ .  
 b) En déduire que  $W$  est une variable à densité.

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et par  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que  $V$ , c'est-à-dire la loi  $\mathcal{E}(1)$ .

On considère la variable aléatoire  $Y_n$  définie par  $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a :  $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ . On admet que  $Y_n$  est une variable aléatoire à densité.

- 2) a) Montrer que la fonction de répartition  $F_{Y_n}$  de  $Y_n$  est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- b) En déduire une densité  $f_{Y_n}$  de  $Y_n$ .

- 3) a) Donner un équivalent de  $1 - F_{Y_n}(t)$  lorsque  $t$  est au voisinage de  $+\infty$ , puis montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$  est convergente.

- b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

- c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$ .

- d) En déduire que  $Y_n$  possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

- 4) a) Montrer, grâce au changement de variable  $u = 1 - e^{-t}$ , que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1 - e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u} du$$

- b) En déduire que  $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$ , puis donner  $E(Y_n)$  sous forme de somme.