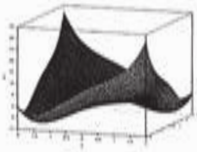
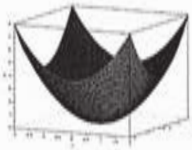
5) a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
function z=f(x,y)
z = ------
endfunction
x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplot3d(x,y,f)
```

b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2

Nappe 3

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ e_0(t) = 1,\ e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2\,.$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(\varphi(P)\big)(x) = \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

1) a) Montrer que φ est linéaire.

b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0, e_1, e_2.

c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

2) a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[------]
disp(------)
```

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier naturel n.

c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln V$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit la loi de Gumbel.

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est-à-dire la loi $\mathcal{E}(1)$.

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\right)$. On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2) a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)^n \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3) a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt = x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt$$

4) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u} du$$

b) En déduire que $\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - e^{-x}\right)^k}{k}$, puis donner $E(Y_n)$ sous forme de somme.